№ 12-дәріс.

Тақырыбы: Даламбер белгісі. Кошидің радикалдық және интегралдық белгілері.

Даламбер белгісі (Коши).

Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\right)$, мұндағы l -ақырлы сан болса, онда:

а) егер $l<1$ болса, онда (1) қатары жинақты,
б) егер $l>1$ болса, (1) қатары жинақсыз,
в) $l=1$ қатардың жинақтылығы туралы сұрақ ашық қалады.

Мысал 1. Қатарды жинақтылыққа зертте:

а) $\dfrac{3}{5}+\left(\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(\dfrac{7}{11}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n+\ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^\infty=0$, яғни, жинақтылықтың қажетті шарты орындалады. Коши белгісін қолданамыз:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}<1$ - қатар жинақты.

б) гармониялық қатар үшін:

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$

Жинақтылықтың қажетті шарты : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ орындалады. Даламбер белгісін қолданамыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ -жинақтылық туралы сұрақ ашық қалады.

Мысал 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n-3}{5n+2}\right)^{3n+4}$.

Шешуі. $a_n=\left(\dfrac{4n-3}{5n+2}\right)^{3n+4}$ болады. Коши белгісін қолдансақ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^{\frac{3n+4}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{3}{n}}{5+\frac{2}{n}}\right)^{3+\frac{4}{n}}=\left(\frac{4}{5}\right)^3<1.$$

Яғни, берілген қатар жинақты.

Кошидің интегралдық белгісі.

Қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N\ge a_{N+1}\ge a_{N+2}\ge\ldots$ теңсіздігі орындалсын және $f(x)$ функциясы мынадай үзіліссіз өспелі емес функция болсын:

$f(N) = a_N,\ f(N+1) = a_{N+1}, \ldots$. Онда, егер $\int_N^{\infty} f(x)dx$ жинақты (жинақсыз) болса, онда (1) қатары жинақты (жинақсыз).

Мысал 3. Берілген қатарды жинақтылыққа зертте:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots, \qquad p > 0 - const \quad . \tag{5}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ - қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалады.

$\frac{1}{1^p} > \frac{1}{2^p} > \frac{1}{3^p} > \ldots$ болғандықтан, $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $N = 1$ деп алып, Кошидің интегралдық белгісін қолдансақ;

а) $p = 1$ болса, онда $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N \to \infty} ln\ x\Big|_1^N = \lim\limits_{N \to \infty} \left(ln\ N - ln\ 1\right) = \infty$, яғни, интеграл жинақсыз. б)

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^N = \frac{1}{1-p} \lim_{N \to \infty} \left(N^{1-p} - 1\right).$$

Бұл интеграл $p > 1$ болғанда жинақты, ал $p < 1$ жинақсыз.

Ендеше, (5) қатары $p > 1$ болғанда ғана жинақты, ал қалған жағдайларда жинақсыз.

Егер p=1 болса, (5) қатары біз жоғарыда 5-мысалда қарастырған гармониялық қатар болады және ол жинақсыз. Ал $p \neq 1$ болса, онда (5) Дирихле қатары деп аталады.

Мысал 4. Қатарды жинақтылыққа зертте: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

Шешуі. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатарымен салыстыралық, бұл қатар көрсеткіші $p = \frac{1}{2} < 1$ болатын Дирихле қатары және ол жинақсыз. $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3}} > \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$.Ендеше, салыстырудың бірінші белгісі бойынша берілген қатар жинақсыз.